Kreditberechnungen im Mathematikunterricht

Dr. Maria Koth, Universität Wien

Inhalt

0. Einleitung
1. Wie werden Spareinlagen verzinst?
2. Wie werden die Sollzinsen bei Verbraucherkrediten berechnet?
3. Tilgung eines Kredits durch gleich hohe monatliche Raten
4. Der effektive Jahreszinssatz eines Verbraucherkredits
5. Aufgabenstellungen zu Kreditberechnungen

O. Einleitung

Mit Beginn des Jahres 1994 ist in Österreich ein neues Bankwesengesetz in Kraft getreten. Für Kredite an Verbraucher im Sinne des Konsumentenschutzgesetzes (darunter fallen alle Kredite, die Zwecken der privaten Lebensführung dienen) wird in diesem Gesetz die Bezeichnung Verbraucherkredit eingeführt. Diese Kredite unterliegen ab 1994 speziellen Verbraucherschutzbestimmungen.

Verbraucherkredite werden von den Banken im allgemeinen dekursiv verzinst. Üblich ist die vierteljährliche Kapitalisierung, wobei die Schuldtage anders als bei der Verzinsung von Spareinlagen kalendermäßig gezählt werden.

Im folgenden wird nach einer Zusammenfassung der Modalitäten der Verzinsung von Spareinlagen (Abschnitt 1) diese in der Bankpraxis übliche Berechnung der Sollzinsen erläutert (Abschnitt 2). Im Anschluß daran wird auf den verbreiteten Fall der Tilgung eines Kredits durch gleich hohe monatliche Raten eingegangen und eine Näherungsformel für die Höhe der monatlichen Rate hergeleitet (Abschnitt 3).

Das neue Bankwesengesetz enthält erstmals eine präzise Definition des Begriffes effektiver Jahreszinssatz eines Verbraucherkredits in Form einer mathematischen Formel. In Abschnitt 4 wird diese Formel vorgestellt und anhand von Spezialfällen und konkreten numerischen Beispielen interpretiert.

Abschließend findet man in Abschnitt 5 eine Reihe realitätsbezogener Aufgabenstellungen für den Mathematikunterricht, die mit Hilfe der in diesem Artikel gegebenen Informationen bearbeitet werden können.

1. Wie werden Spareinlagen verzinst?

Die Modalitäten der Verzinsung von Spareinlagen sind im § 32 des Bankwesengesetzes (BWG) festgelegt. Die wesentlichen Bestimmungen dabei sind:

- Die Spareinlagen sind -sofern nicht innerhalb eines Jahres eine volle Auszahlung der Spareinlage stattfindet- mit dem Ende des Kalenderjahres abzuschließen (Abschlußtermin).
- Die Verzinsung von Einzahlungen auf Spareinlagen beginnt mit dem Wertstellungstag (BWG § 37), das heißt spätestens mit dem ersten Werktag, der dem Kalendertag, an dem die Beträge tatsächlich einlangen, folgt.
- Bei der Verzinsung von Spareinlagen ist der Monat zu 30 und das Jahr zu 360 Tagen zu rechnen.
- Die Zinsen sind zum Abschlußtermin dem Kapital zuzuschlagen und mit diesem vom folgenden Tag an zu verzinsen.
- Bei Auszahlungen aus Spareinlagen sind die Zinsen für den ausgezahlten Betrag bis einschließlich dem der Auszahlung vorangegangenen Kalendertag zu berechnen.

Bis Ende 1993 wurden Spareinlagen erst ab dem nächsten Bankgeschäftstag nach der Einzahlung und Abhebungen nur bis zum letzten vorangegangenen Bankgeschätstag verzinst. Das 1994 in Kraft getretene Bankwesengesetz hat daher die folgenden Änderungen gebracht: Einzahlungen an einem Freitag werden ab 1994 bereits ab Samstag und nicht erst ab Montag verzinst, Abhebungen an einem Montag werden ab 1994 bis Sonntag und nicht mehr nur bis zum vorangegangenen Freitag verzinst.

Beispiel:

Ein Sparbuch mit einer Einlage von 100 000 S wird am Freitag, 6.Mai 1994 eröffnet und am Donnerstag, 17. August 1995 aufgelöst. Der Jahreszinssatz betrage 3%. Die Verzinsung beginnt also am Samstag, 7. Mai 1994 und endet mit Mittwoch 16. August 1995. Die anfallenden Zinsen setzen sich folgendermaßen zusammen:
- Zinsen für 24+30*7 = 234 Tage (7.Mai bis 31.Dez.94) von 100 000S S =
= 100 000*0,03*234/360 = 1950,00 S.

- Diese Zinsen werden am Abschlußtermin 31.Dez.1994 dem Kapital zugeschlagen und mit diesem ab 1.Jänner 95 verzinst.
- Zinsen für 16+30*7 = 226 Tage (1.Jänner bis 16.August 95) von 101 950,00 S = 101 950,00*0,03*226/360 = 1920,06 S.
- Zinsen daher insgesamt: 3870,06 S.

Wird also ein Kapital K an irgendeinem Tag des Jahres auf ein Sparbuch mit dem Jahreszinssatz i% eingezahlt, so werden die Zinsen für dieses Kapital, die innerhalb eines Kalenderjahres anfallen, tageweise ab dem folgenden Werktag berechnet. Dabei wird jeder Monat mit 30 Tagen und das Jahr somit mit 360 Tagen gezählt. Für jeden Tag erhält man den Tageszinssatz i/360%; für t Tage innerhalb eines Kalenderjahres erhält man also an Zinsen Z = K*(i/100)*(t/360). Am Jahresende werden die Zinsen zum Kapital hinzuaddiert und ab dem nächsten Jahr mitverzinst. Für Auszahlungen werden die Zinsen bis zum letzten Kalendertag vor der Abhebung berechnet.

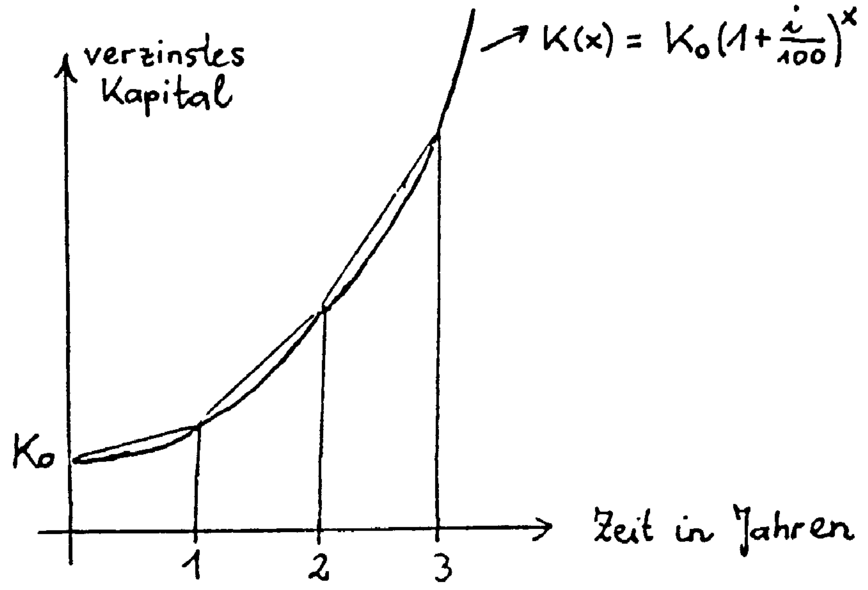
Bei Spareinlagen müssen somit im ersten und im letzten Jahr tageweise einfache Zinsen berechnet werden, in den Jahren dazwischen kann (sofern keine Einzahlungen oder Abhebungen erfolgen) die Zinseszinsformel angewendet werden. Diese Art der Verzinsung bezeichnet man als **gemischte Verzinsung**.

Diese von den Banken verwendete Methode der gemischten Verzinsung hat den Nachteil, daß die Höhe der Zinsen immer vom genauen Einzahlungsdatum abhängt. Wird, zum Beispiel, ein Kapital von 100 000 S ein Jahr lang mit 5% p.a. verzinst, so schwankt die Höhe der Zinsen zwischen 5000 S und 5062,5 S, je nachdem, wann der Kapitalisierungstermin 31. Dezember innerhalb des Verzinsungszeitraums liegt: Der Guthabensstand nach einem Jahr beträgt für den Zeitraum 1.Jänner bis 31.Dezember 100 000*1,05 = 105 000, für den Zeitraum 1.Juli bis 30.Juni dagegen 100 000*1,025*1,025 = 105 062,5 S. Für alle anderen Einzahlungstermine liegt er dazwischen.

Außerdem sind Berechnungen unter Anwendung der gemischten Verzinsung mühsam durchzuführen, insbesondere dann, wenn mehrere Einzahlungen oder Abhebungen zu berücksichtigen sind.

Mathematisch gesehen bedeutet die gemischte Verzinsung, daß das verzinste Kapital zwischen aufeinanderfolgenden 31.Dezembern exponentiell, innerhalb der einzelnen Kalenderjahre jedoch linear wächst.

Wird ein Kapital K ab einem 31.Dezember mit i% p.a. verzinst, so beträgt der Guthabensstand K_n nach n vollen Jahren $K_n = K(1+i/100)^n$. Stellt man den Guthabensstand in Abhängigkeit von der Verzinsungsdauer graphisch dar, so entsprechen diesen Guthabensständen K_n Punkte auf dem Graphen der Exponentialfunktion $K(x) = K^*(1+i/100)^x$. Die Guthabensstände für beliebiege Tage innerhalb der Kalenderjahre erhält man nun, indem man aufeinanderfolgende Punkte K_n - K_{n+1} dieses Graphen durch Strecken verbindet:



Eine andere Möglichkeit der Verzinsung wäre dadurch gegeben, die Exponentialfunktion $K(x) = K^*(1+i/100)^x$ auch für nichtganzzahlige Werte von x zu verwenden, das heißt:

Guthaben nach n Jahren und t Tagen = $K^*(1+i/100)^{(n+t/360)}$

Diese Art der Zinsenberechnung nennt man **theoretische Verzinsung**. Sie hat gegenüber der gemischten Verzinsung den Vorteil, daß die Höhe der Zinsen nur von der Verzinsungsdauer, nicht aber vom speziellen Datum der Einzahlung abhängt. Da die numerischen Ergebnisse bei gemischter und theoretischer Verzinsung nur geringfügig voneinander abweichen, wird in näherungsweisen Berechnungen oft mit der theoretischen Verzinsung gearbeitet.

2. Wie werden die Sollzinsen bei Verbraucherkrediten berechnet?

Die Habenzinsen für Spareinlagen werden innerhalb eines Kalenderjahres tageweise von einer Kontostandsänderung zur nächsten berechnet. Jedem Jahr entsprechen 360 Zinstage (dh. 30 pro Monat), und für jeden Zinstag wird 1/360 der entsprechenden

Jahreszinsen gewährt. Das heißt: Zinsen für ein Kapital von K Schilling für t Tage bei einem Jahreszinssatz von i% = K*(i/100)*(t/360).
Diese tageweise berechneten Zinsen werden am Ende des Jahres zum Kapital hinzuaddiert und ab dem nächsten Tag mitverzinst.

Die anfallenden Sollzinsen für Verbraucherkredite werden in analoger Weise tageweise vom jeweils offenen Schuldkapital berechnet:
Sollzinsen für ein Schuldkapital von K Schilling für t Tage bei einem Jahreszinssatz von i% = K*(i/100)*(t/360).

Im Vergleich zur Verzinsung von Spareinlagen sind jedoch die folgenden Unterschiede zu berücksichtigen:
- Die Anzahl der Schuldtage bei einem Kredit wird kalendermäßig berechnet (dh. ein Jahr hat insgesamt 365 Schuldtage, ein Schaltjahr sogar 366).
- Die sich tageweise von einer Kontostandsänderung zur nächsten ergebenden Zinsen werden (üblicherweise) jeweils am Ende eines Kalendervierteljahres (dh. am 31.3., 30.6., 30.9. und 31.12.) zum Schuldkapital hinzuaddiert und im folgenden mitverzinst.

Beispiel 1:

Auf einem Kreditkonto mit einem Jahreszinssatz von 10% sind am 31. Dezember 1993 noch 157 000 S offen.
Es werden die folgenden Einzahlungen valutiert: 3000 S am 5.Jänner, 4000 S am 1.Februar und 3000 S am 1.März.
Bestimmung des Kontostandes für 31.März:
Die am 31. März aufgeschlagenen Sollzinsen setzen sich zusammen aus:
Zinsen von 157 000 S für 5 Tage (31.Dez. bis 5.Jänner) =
157000*10/100*5/360 = 218,06 S
Zinsen von 154 000 S für 27 Tage (5.Jänner bis 1.Feber) =
154000*10/100*27/360 = 1155,00 S
Zinsen für 150 000 S für 28 Tage (1.Feber bis 1.März) =
150000*10/100*28/360 = 1166,67 S
Zinsen für 147 000 S für 30 Tage (1. bis 31. März) =
147000*10/100*30/360 = 1225,00 S
Gesamtzinsen für das 1.Quartal = 3764,73 S
Kontostand am 31.März =
157000 - (3000+4000+3000) + 3764,73 = 150 764,73 S.

Beispiel 2:

Auf einem Kreditkonto mit einem Jahreszinssatz von 10% sind am 31.Dezember 1993 noch 100 000 S offen.
Wie groß ist der Schuldenstand am 31. Dezember 1994, wenn bis dahin (mit Einverständnis der Bank und daher ohne zusätzliche Verzugszinsen) keine Zahlungen geleistet werden?

Zinsen von 100 000 S für den Zeitraum 31.12. bis 31.3. =
100 000*(10/100)*(90/360) = 2500 S
--> Schuldenstand am Ende des 1.Quartals = 102 500 S
Zinsen von 102 500 S für den Zeitraum 31.3. bis 30.6. =
102 500*(10/100)*(92/360) = 2590,97 S
--> Schuldenstand am Ende des 2.Quartals = 105 090,97 S
Zinsen von 105 090,97 S für den Zeitraum 30.6. bis 30.9. =
105 090,97*(10/100)*(92/360) = 2685,66 S
--> Schuldenstand am Ende des 3.Quartals = 107 776,63 S
Zinsen von 107 776,63 S für den Zeitraum 30.9. bis 31.12. =
107 776,63*(10/100)*(92/360) = 2754,29 S
--> Schuldenstand am 31.Dezember 1994 = 110 530,92 S

Beispiel 2 zeigt deutlich, daß der von den Banken angegebene kontokorrentmäßige Jahreszinssatz bei einem Kredit nicht unmittelbar mit dem Jahreszinssatz bei Spareinlagen verglichen werden kann: Während ein Sparguthaben von 100 000 S bei einem Jahreszinssatz von 10% im Lauf eines Kalenderjahres auf 110 000 S anwächst, wächst eine Kreditschuld gleicher Höhe bei nominell gleichem Jahreszinssatz auf 110 530,92 S (das heißt um 10,53% und nicht um 10%).

Rechnet man jedes Jahr mit 360 Tagen und damit jedes Vierteljahr mit 90 Tagen, so sind bei einem Jahreszinssatz von i% am Ende jedes Vierteljahres für das volle Quartal Zinsen in der Höhe von i/4 % aufzuschlagen. Da bei einem Kredit die Schuldtage kalendermäßig gezählt werden, sind aber die einzelnen Quartale nicht gleich lang.

Um zu berücksichtigen, daß für jeden Schuldtag i/360 % an Zinsen verrechnet werden, ein Jahr jedoch mit 365 Tagen gezählt wird, darf man für den Quartalszinssatz q% in guter Näherung setzen:

$$q = (i/4)*(365/360).$$

Diesem näherungsweisen Quartalszinssatz entspricht der äquivalente Jahreszinssatz j% : $1 + j/100 = (1 + (q/100))^4$.

3. Tilgung eines Kredits durch gleich hohe monatliche Raten:

Meistens werden Verbraucherkredite durch gleich hohe monatliche Raten getilgt. Aufgrund der oben erläuterten Berechnungsweise der anfallenden Schuldzinsen ist eine exakte Vorherbestimmung der Höhe der monatlichen Rate sehr mühsam (und praktisch kaum möglich, da die sich ergebende Gesamtbelastung vom genauen Einzahlungsdatum der einzelnen Raten abhängt). Daher wird dem Kreditnehmer bei Abschluß des Kreditvertrages die Höhe der monatlichen Rate in Abhängigkeit von der gewählten Laufzeit zunächst nur näherungsweise errechnet. Dieser Betrag wird dann monatlich eingezahlt, und erst durch die Höhe der letzten Rate am Ende der Laufzeit wird der Kontostand genau auf Null ausgeglichen.

Bei der näherungsweisen Bestimmung der monatlichen Rate kann man folgendermaßen vorgehen:

Angenommen, eine Kreditsumme K wird zu Beginn eines Quartals ausbezahlt, und die erste Rate der Höhe R ist einen Monat danach fällig.

Einem kontokorrentmäßigen Jahreszinssatz von i% entspricht als Quartalszinssatz annähernd $q = i/100/4*(365/360)$. Da innerhalb eines Quartals einfache Zinsen berechnet werden, kann man pro Monat annähernd $q/3$ als Zinssatz annehmen.

Daraus folgt:

Schuldkapital zu Beginn: K
--> Zinsen für 1.Monat: $Z_1 \approx K*(q/3)$
Schuldkapital nach einem Monat: $K - R$
--> Zinsen für 2.Monat: $Z_2 \approx (K-R)*(q/3)$
Schuldkapital nach zwei Monaten: $K - 2R$
--> Zinsen für 3.Monat: $Z_2 \approx (K-2R)*(q/3)$

Am Ende des ersten Quartals werden die Schuldzinsen für das gesamte Quartal aufgeschlagen.

--> Schuldenstand am Ende des ersten Quartals:
$K_1 = K - 3R + Z_1 + Z_2 + Z_3 = K*(1+q) - R*(3+q)$

Analog dazu erhält man:

Schuldenstand am Ende des zweiten Quartals:
$K_2 = K_1*(1+q) - R*(3+q) = K*(1+q)^2 - R*(3+q)*[(1+q)+1]$

Schuldenstand am Ende des dritten Quartals:
$K_3 = K_2*(1+q) - R*(3+q) = K*(1+q)^3 - R*(3+q)*[(1+q)^2+(1+q)+1]$

....

Schuldenstand am Ende des n-ten Quartals:
$K_n = K*(1+q)^n - R*(3+q)*[(1+q)^{n-1} + ... + (1+q)^2 + (1+q) + 1]$

$$\text{--->}\quad K_n = K*(1+q)^n - R*(3+q)* \frac{(1+q)^n - 1}{(1+q) - 1}$$

Soll nun die Laufzeit des Kredits n Quartale betragen, so muß die Restschuld K_n am Ende des n-ten Quartals gleich Null sein.
Setzt man in der obigen Gleichung $K_n = 0$ und formt nach R um, so erhält man als näherungsweise Höhe der erforderlichen monatlichen Rate R

$$R = K* \frac{q*(1+q)^n}{(3+q)*[(1+q)^n - 1]}$$ **[≈ monatliche Rate bei einer Laufzeit von n Quartalen, wobei $q = i/100/4*(365/360)$]**

Man könnte die Höhe der monatlichen Rate auch folgendermaßen annähern:

Dem Quartalszinssatz q entspricht bei monatlicher Kapitalisierung der äquivalente monatliche Zinssatz m :

$1 + m = (1+q)^{1/3}$

Daraus folgt:
Schuldenstand nach einem Monat: $K_1 = K*(1+m) - R$
Schuldenstand nach zwei Monaten: $K_2 = K*(1+m)^2 - R*[(1+m)+1]$
....

Schuldenstand nach n Monaten:

$K_n = K*(1+m)^n - R*[(1+m)^{n-1} + ... + (1+m)+1]$

$$K_n = K^*(1+m)^n - R^* \frac{(1+m)^n - 1}{m}$$

Aus $K_n = 0$ folgt hier

$$R = K^* \frac{m^*(1+m)^n}{(1+m)^n - 1}$$

[≈ monatliche Rate bei einer Laufzeit von n Monaten, wobei $q = i/100/4^*(365/360)$ und $1+m = (1+q)^{(1/3)}$]

Beispiel 1:

Mit Hilfe der obigen Formeln kann man nun die näherungsweise Höhe der monatlichen Kreditrate und auch die Kreditgesamtbelastung rasch berechnen. Die folgende Tabelle zeigt anhand eines konkreten Beispiels die Abhängigkeit der Monatsrate bzw. der Gesamtbelastung von der Kreditlaufzeit auf.

Kreditsumme:	100000.00 öS
Jahreszinssatz:	10.5 %

Laufzeit in Monaten	Monatliche Kreditrate	Gesamt-belastung
12	8816.87	105802.38
24	4639.81	111355.41
36	3252.57	117092.37
48	2562.76	123012.25
60	2151.89	129113.65
72	1880.48	135394.78
84	1688.73	141853.50
96	1546.74	148487.28
108	1437.90	155293.29
120	1352.24	162268.39
132	1283.40	169409.11
144	1227.17	176711.76
156	1180.59	184172.39
168	1141.59	191786.83
180	1108.62	199550.73
192	1080.52	207459.57
204	1056.42	215508.71
216	1035.62	223693.40
228	1017.58	232008.80
240	1001.88	240450.01

Beispiel 2:

Die folgende Tabelle zeigt die Höhe der monatlichen Rate für verschiedene Laufzeiten und auch für verschiedene Jahreszinssätze:

```
Rückzahlungsmodus:       gleich hohe monatliche Raten
Rückzahlungsbeginn:      ein Monat nach Auszahlung
-----------------------------------------------------
Kreditsumme: 100000 öS
-----------------------------------------------------
```

	Jahreszinssatz in Prozent:							
Jahre	8.50	9.00	9.50	10.00	10.50	11.00	11.50	12.00
1	8725	8748	8771	8794	8817	8841	8864	8887
2	4549	4571	4594	4617	4640	4663	4686	4710
3	3160	3183	3206	3230	3253	3277	3300	3324
4	2468	2492	2515	2539	2563	2587	2612	2636
5	2055	2079	2103	2128	2152	2177	2202	2227
6	1781	1806	1831	1856	1881	1906	1932	1958
7	1587	1612	1638	1663	1689	1715	1742	1768
8	1443	1468	1494	1521	1547	1574	1601	1628
9	1331	1358	1384	1411	1438	1466	1493	1521
10	1243	1270	1297	1325	1353	1381	1409	1438

Beispiel 3:

Mit Hilfe des (an jeder Schule vorhandenen) Tabellenkalkulationsprogramms Supercalc 5 ist es relativ einfach möglich, Tilgungspläne für Kredite zu erstellen.

Im folgenden Beispiel wird ein Kredit mit 24 Monaten Laufzeit und einem Jahreszinssatz von 9,75% betrachtet. Bei der Kreditaufnahme ist eine Bearbeitungsgebühr an die Bank in der Höhe von 1% der Kreditsumme zu entrichten. Außerdem ist eine Kreditsteuer zu bezahlen, die 0,8% der Kreditsumme beträgt. Unter Berücksichtigung dieser Spesen ist die Kreditsumme bei einem Auszahlungsbetrag von Z = 100 000 S mit Z/0,982 anzusetzen. Daher beträgt der Darlehensrest am Tag der Kreditauszahlung, dem 8.4.94, 101 832,99 S und nicht 100 000 S. Als Höhe der monatlichen Rate errechnet man für diese Kreditsumme 4689,71 S.

Die Tabelle zeigt den Tilgungsverlauf für den Fall, daß diese Rate monatlich bezahlt wird. Jeweils zu Quartalsende werden die Sollzinsen für das gesamte Quartal aufgeschlagen.

Tilgungsplan (mit genauer datumsweiser Zinsenberechnung)

Auszahlungsbetrag:	100000.00	öS
Jahreszinssatz:	9.75	%
Bearbeitungsgebühr:	1.00	%
Kreditsteuer:	.80	%
Laufzeit:	24.00	Monate
Monatliche Rate:	4689.71	öS

FAELLIG	ZINSEN	Zinsen berechnung	TILGUNG	RATE	DARL.REST
08.04.94					101832.99
08.05.94		827.39	4689.71	4689.71	97143.28
08.06.94		815.60	4689.71	4689.71	92453.57
30.06.94	2193.86	550.87	-2193.86		94647.43
08.07.94		205.07	4689.71	4689.71	89957.72
08.08.94		755.27	4689.71	4689.71	85268.01
08.09.94		715.90	4689.71	4689.71	80578.29
30.09.94	2156.35	480.11	-2156.35		82734.64
08.10.94		179.26	4689.71	4689.71	78044.93
08.11.94		655.25	4689.71	4689.71	73355.22
08.12.94		596.01	4689.71	4689.71	68665.51
31.12.94	1858.25	427.73	-1858.25		70523.76
08.01.95		152.80	4689.71	4689.71	65834.04
08.02.95		552.73	4689.71	4689.71	61144.33
08.03.95		463.68	4689.71	4689.71	56454.62
31.03.95	1520.88	351.67	-1520.88		57975.50
08.04.95		125.61	4689.71	4689.71	53285.78
08.05.95		432.95	4689.71	4689.71	48596.07
08.06.95		408.00	4689.71	4689.71	43906.36
30.06.95	1228.17	261.61	-1228.17		45134.53
08.07.95		97.79	4689.71	4689.71	40444.82
08.08.95		339.57	4689.71	4689.71	35755.11
08.09.95		300.19	4689.71	4689.71	31065.40
30.09.95	922.65	185.10	-922.65		31988.05
08.10.95		69.31	4689.71	4689.71	27298.34
08.11.95		229.19	4689.71	4689.71	22608.63
08.12.95		183.70	4689.71	4689.71	17918.91
31.12.95	593.81	111.62	-593.81		18512.73
08.01.96		40.11	4689.71	4689.71	13823.02
08.02.96		116.06	4689.71	4689.71	9133.30
08.03.96		71.73	4689.71	4689.71	4443.59
31.03.96	255.58	27.68	-255.58		4699.17
08.04.96		10.18	4689.71	4689.71	9.46

4. Der effektive Jahreszinssatz von Verbraucherkrediten

Aufgrund der vierteljährlichen Kapitalisierung und der kalendermäßigen Zählung der Schuldtage kann der von den Banken angegebene kontokorrentmäßige Jahreszinssatz eines Kredits nicht unmittelbar mit dem Jahreszinssatz bei Spareinlagen verglichen werden. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß bei einem Kredit Spesen anfallen (z.B. Bearbeitungsgebühren der Bank), die zur Gesamtbelastung des Kreditnehmers beitragen und damit eine Erhöhung des Jahreszinssatzes bewirken.

Um die Kreditkonditionen für den Konsumenten transparenter zu machen, enthält das neue Bankwesengesetz eine präzise Definition des effektiven Jahreszinssatzes eines Verbraucherkredits:

Bankwesengestz §33 (4) und (7):

(4) Der effektive Jahreszinssatz ist jener ganzjährige, dekursive Hundertsatz, der rechnerische Gleichheit zwischen dem ausbezahlten Kreditbetrag und der Gesamtbelastung des Verbrauchers herstellt. Er drückt die Kreditkosten gemäß Abs. 7 Z 2 im Verhältnis zum ausbezahlten Kreditbetrag aus, ist aus folgender finanzmathematischer Formel zu errechnen und unter Anwendung kaufmännischer Rundungsregeln auf eine Dezimalstelle anzugeben:

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{Z_x}{(1+i)^{t_x}} = \sum_{y=1}^{m} \frac{R_y}{(1+i)^{t_y}}$$

Hiebei ist:

- Z_x der Teil des Kreditbetrages mit Nummer 1 bis n, der dem Verbraucher ausbezahlt wird,
- t_x der in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückte Zeitabstand zwischen dem Zeitpunkt der Auszahlung des ersten Teiles des Kreditbetrages und dem Zeitpunkt der späteren Auszahlungen Z_2 bis Z_n, wobei $t_1 = 0$ gilt,
- i der effektive Jahreszinssatz,
- R_y der jeweils rückzuzahlende Teilbetrag der Gesamtbelastung mit Nummer 1 bis m,
- t_y der in Jahren oder Jahresbruchteilen ausgedrückte Zeitabstand zwischen dem Zeitpunkt, in dem der Kreditbetrag Z_1 dem Verbraucher ausbezahlt wird, und dem jeweiligen Rückzahlungszeitpunkt der Teilbeträge R_1 bis R_n. Jahre und Jahresbruchteile sind für t_x und t_y 360/360 und analog zur Verzinsung von Spareinlagen zu rechnen.

(7) Die Gesamtbelastung ist die Summe der Leistungen, die das Kreditinstitut im Zusammenhang mit der Kreditgewährung vom Verbraucher verlangt. Zur Gesamtbelastung zählen:

1. Die Rückzahlung des ausbezahlten Kreditbetrages und
2. die Kreditkosten mit Ausnahme jener Kosten, die dem Verbraucher erwachsen durch:
   a) Nichterfüllung seiner Verpflichtungen,
   b) Überweisung der rückzuzahlenden Teilbeträge oder Führung eines Kontos, sofern diese Kosten nicht höher sind, als jene für Verbrauchergirokonten,
   c) Zahlungen öffentlicher Abgaben und
   d) Zahlungen für Versicherungen oder Sicherheiten, soweit sie bei Tod, Invalidität, Krankheit oder Arbeitslosigkeit des Verbrauchers die Rückzahlung eines die Gesamtbelastung übersteigenden Betrages an das Kreditinstitut sichern und die Zahlung vom Kreditinstitut nicht zwingend als Bedingung für die Kreditgewährung vorgeschrieben wird.

Die Banken sind verpflichtet, diesen effektiven Jahreszinssatz in jedem Verbraucherkreditvertrag anzugeben. Außerdem ist dem Kreditnehmer bei jeder Zinssatzänderung eines laufenden Kredits die damit verbundene Änderung des effektiven Jahreszinssatzes vor Wirksamwerden der Änderung schriftlich bekanntzugeben.

Die im Bankwesengesetz angegebene Formel zur Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes ist sehr allgemein gehalten. Sie berücksichtigt Rückzahlungen R_y unterschiedlicher Höhe zu beliebigen Zeitpunkten und sieht sogar die Möglichkeit vor, daß die Kreditsumme in mehreren Teilbeträgen Z_x ausbezahlt wird. Damit die Schüler diese abstrakte Formel inhaltlich verstehen, empfiehlt es sich, im Mathematikunterricht zunächst Spezialfälle zu betrachten.

Beschränkt man sich auf den gängigen Fall, daß der gesamte Kreditbetrag Z auf einmal ausbezahlt wird, so reduziert sich die Formel auf

$$Z = \sum_{y=1}^{m} \frac{R_y}{(1+i)^{t_y}}$$

Nimmt man weiters an, daß der Kredit durch n gleich hohe monatliche Raten R beginnend einen Monat nach Auszahlung des Betrags Z getilgt wird, so erhält man

$$Z = R\left[\frac{1}{(1+i)^{1/12}} + \frac{1}{(1+i)^{2/12}} + \ldots\ldots + \frac{1}{(1+i)^{n/12}}\right]$$

Multiplikation mit $(1+i)^{n/12}$ ergibt

$$Z*(1+i)^{n/12} = R*[(1+i)^{(n-1)/12} + \ldots\ldots + (1+i)^{1/12} + 1]$$

Diese Gleichung kann nun folgendermaßen interpretiert werden:

Wird der Auszahlungsbetrag Z n Monate lang auf einem Sparbuch mit Jahreszinssatz i% verzinst, so wächst er bei theoretischer Verzinsung auf den Wert $Z(1+i)^{n/12}$.
Die monatlichen Kreditraten der Höhe R beginnend einen Monat nach der Auszahlung von Z ergeben am Ende der n Monate bei gleicher Verzinsung den Wert $R[(1+i)^{(n-1)/12} + \ldots\ldots + (1+i)^{1/12} + 1]$.
Bezogen auf den Zeitpunt n Monate nach Kreditauszahlung gibt also die linke Seite der Gleichung die Leistung der Bank und die rechte Seite die gesamte Leistung des

Kreditnehmers an, wobei in beiden Fällen ganzjährige Kapitalisierung mit i% p.a. und Zählung der Zinstage analog zur Sparbuchverzinsung (360/360) angenommen wird. Der als Lösung dieser Gleichung definierte effektive Jahreszinssatz i entspricht damit annähernd dem vergleichbaren Jahreszinssatz für Spareinlagen.

Dieser Spezialfall der Gleichung reicht aus, um den effektiven Jahreszinssatz für konkrete Kreditbeispiele berechnen zu können:

Beispiel 1:

Im Werbeprospekt einer Bank wird ein Kredit zu 8,875% p.a. bei 1% Bearbeitungsgebühr angeboten (Stand April 1994). Der Effektivzinssatz wird für eine Laufzeit von 5 Jahren mit 9,77%, für 10 Jahre mit 9,56% angegeben (siehe Aufgabe Nr. 15 aus Abschnitt 5).

Um diese Werte zu überprüfen, betrachtet man einen beliebigen Auszahlungsbetrag Z, zum Beispiel Z = 100 000 S. Bei der Berechnung des effektiven Jahreszinssatzes ist die 1%ige Bearbeitungsgebühr der Bank in die Kreditgesamtbelastung einzurechnen, nicht jedoch die 0,8%ige Kreditsteuer (siehe BWG §33(7), Z.2, lit c).

Unter Berücksichtigung der Bearbeitungsgebühr ist die Kreditsumme mit $K = Z/0{,}99 \approx 101010{,}10$ S anzusetzen. Man nimmt nun an, daß dieser Betrag K durch 60 bzw. 120 gleich hohe monatliche Raten, beginnend einen Monat nach Auszahlung von Z getilgt wird. Für eine Laufzeit von 5 Jahren und den gegebenen Jahreszinssatz von 8,875% errechnet man mit Hilfe der Formel aus Abschnitt 3 die Höhe der monatlichen Rate zu $R \approx 2093{,}38$ S, für 10-jährige Laufzeit erhält man analog dazu $R \approx 1275{,}77$ S.

Setzt man in der obigen Gleichung für den effektiven Jahreszinssatz vereinfachend $(1+i)^{1/12} = x$, so erhält man

$$Z\, x^n = R\,(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots\ldots + x + 1).$$

Einsetzen der konkreten Werte für Z und R ergibt

$$100000\, x^n = 2093{,}38\,(x^{59} + x^{58} + \ldots\ldots + x + 1) \text{ bzw.}$$

$$100000\, x^n = 1275{,}77\,(x^{119} + x^{118} + \ldots\ldots + x + 1).$$

Diese Gleichungen können in der Schule näherungsweise (zum Beispiel mit Hilfe von Derive) gelöst werden und ergeben für den effektiven Jahreszinssatz $1+i = x^{12}$ die von der Bank genannten Werte 1,0977 bzw. 1,0956.

Dieses Beispiel zeigt, daß der effektive Jahreszinssatz im allgemeinen laufzeitabhängig ist: Bei sonst gleichen Kreditkonditionen ist er bei 10-jähriger Laufzeit etwas kleiner als bei 5-jähriger Laufzeit. Dieses Sinken des effektiven Jahreszinssatzes mit zunehmender Laufzeit kann im wesentlichen dadurch erklärt werden, daß die bei der Kreditaufnahme fällige einmalige Bearbeitungsgebühr in beiden Fällen gleich groß ist und sich daher bei längerer Laufzeit als Belastung prozentuell schwächer auswirkt.

Beispiel 2:

Bei Aufnahme eines Kredits ist in der Regel eine einmalige Bearbeitungsgebühr an die Bank zu entrichten. Diese beträgt üblicherweise zwischen 1% und 3% der Kreditsumme. Das folgende Kreditbeispiel zeigt, daß sich diese Bearbeitungsgebühren auf den effektiven Jahreszinssatz deutlich auswirken.

Betrachtet man einen Auszahlungsbetrag von Z = 100 000 S, so ist die Kreditsumme bei einer Bearbeitungsgebühr von 1% mit Z/0,99, bei 2% mit Z/0,98 und bei 3% mit Z/0,97 anzusetzen. Soll diese Kreditsumme durch 60 bzw. 120 gleich hohe monatliche Raten beginnend einen Monat nach der Auszahlung von Z getilgt werden, so errechnet man für einen Jahreszinssatz von 8,875% die folgenden Werte:

Laufzeit	Z = 100 000 S i = 8,875%	Bearbeitungsgebühr: 0%	1%	2%	3%
5 Jahre	Monatsrate	2072,44	2093,38	2114,73	2136,54
	eff.Zinssatz	9,30%	9,77%	10,25%	10,73%
10 Jahre	Monatsrate	1263,01	1275,77	1288,79	1302,07
	eff.Zinssatz	9,30%	9,56%	9,82%	10,09%

Beispiel 3:

Wird der Zinssatz während der Kreditlaufzeit verändert, so ändert sich dadurch auch der effektive Jahreszinssatz. Betrachtet man wieder einen Kredit mit 1% Bearbeitungsgebühr und einer Laufzeit von 120 Monaten, so errechnet man:

Jahreszinssatz:	effektiver Jahreszinssatz:
Gesamte Laufzeit von 10 Jahren 8,875%	9,56%
7 Jahre lang 8,875%, dann Erhöhung auf 10%	9,65%
5 Jahre lang 8,875%, dann Erhöhung auf 10%	9,82%
3 Jahre lang 8,875%, dann Erhöhung auf 10%	10,10%
Gesamte Laufzeit von 10 Jahren 10%	10,77%
7 Jahre lang 10%, dann Senkung auf 8,875%	10,71%
5 Jahre lang 10%, dann Senkung auf 8,875%	10,54%
3 Jahre lang 10%, dann Senkung auf 8,875%	10,25%

Im ersten der angeführten Beispiele ist zunächst die am Ende des 7. Jahres bestehende Restschuld zu ermitteln. Beträgt der Jahreszinssatz anfangs 8,875%, so ist für einen Auszahlungsbetrag von 100 000 S (d.h.einer Kreditsumme von 101010,10 S) bei einer Laufzeit von 120 Monaten eine monatliche Rate von 1275,77 S zu entrichten. Die offene Restschuld am Ende des 7. Jahres beträgt dann 40 160,59 S. Diese Schuld soll nun durch 36 gleich hohe Raten bei einem Jahreszinssatz von 10% getilgt werden. Die Höhe einer solchen Rate beträgt 1296,84 S. Die Gleichung für den effektiven Jahreszinssatz lautet daher

$$100000\, x^{120} = 1275{,}77\, [x^{119}+x^{118}+ \ldots + x^{36}] + 1296{,}84\, [x^{35}+ \ldots + x+1]$$

und liefert für $1+i = x^{12}$ den Wert 1,096499699.... Analog dazu errechnet man auch die übrigen Werte.

Die Tabelle zeigt, daß der effektive Jahreszinssatz eines Kredits, dessen Zinssatz während der Laufzeit geändert wird, wesentlich durch den Zinssatz der ersten Laufzeitjahre beeinflußt wird.

Der im Bankwesengesetz definierte effektive Jahreszinssatz eines Verbraucherkredits entspricht näherungsweise dem vergleichbaren Jahreszinssatz für Spareinlagen. Man muß aber beachten, daß in der Formel für den effektiven Jahreszinssatz die theoretische Verzinsung angewendet wird, während Spareinlagen üblicherweise unterjährig linear verzinst werden. Auf den ersten Blick erscheint es verwunderlich, warum dieser Vergleichszinssatz nicht ebenfalls unter Berücksichtigung der bei der Sparverzinsung üblichen gemischten Verzinsung berechnet wird.

In der Bundesrepublik Deutschland wird seit 1981 eine derartige Formel für den effektiven Jahreszinssatz von Krediten verwendet. Diese lautet:

$$Z*(1+i)^J(1+\frac{m}{12}i) = R * [(12+5{,}5i)(1+\frac{m}{12}i)\frac{(1+i)^J-1}{i} + (m+\frac{m(m-1)}{24}i)]$$

wobei

Z = Auszahlungsbetrag

R = Höhe der monatlichen Rate

i = Effektiver Jahreszinssatz

J = Anzahl der vollen Laufzeitjahre

m = Anzahl der restlichen Monate der Laufzeit ($0 \leq m < 12$), d.h.
die gesamte Laufzeit in Monaten beträgt $12J+m$.

Während die österreichische Formel

$$\sum_{x=1}^{m} \frac{Z_x}{(1+i)^{tx}} = \sum_{y=1}^{n} \frac{R_y}{(1+i)^{ty}}$$

Raten R_y unterschiedlicher Höhe zu beliebigen Rückzahlungsterminen zuläßt und sogar die Möglichkeit berücksichtigt, daß die Kreditsumme in mehreren Teilbeträgen Z_x ausbezahlt wird, ist die deutsche Formel nur auf Kredite anwendbar, die durch gleich hohe monatliche Raten R beginnend einen Monat nach der Auszahlung von Z getilgt werden. Die österreichische Formel für diesen Spezialfall lautet:

$$Z*(1+i)^{n/12} = R * \frac{(1+i)^{n/12}-1}{(1+i)^{1/12}-1}$$

Der folgenden Tabelle kann man den "österreichischen" und den "deutschen" effektiven Jahreszinssatz für verschiedene Kreditzinssätze entnehmen. Dabei wird jeweils angenommen, daß der Kreditbetrag durch 120 gleich hohe monatliche Raten beginnend einen Monat nach Auszahlung getilgt wird, und es wird keine Bearbeitungsgebühr berücksichtigt.

Jahres- zinssatz	Effektiver Jahreszinssatz: Österreich	 Deutschland
8%	8,36%	8,37%
9%	9,44%	9,46%
10%	10,53%	10,55%
11%	11,63%	11,65%
12%	12,73%	12,76%
13%	13,84%	13,88%

Die Werte, die die österreichische Formel liefert, weichen nur geringfügig von den mit Hilfe der gemischten Verzinsung berechneten "deutschen" Effektivzinssätzen ab und können daher als brauchbare Näherungswerte für den vergleichbaren Sparbuchzinssatz angesehen werden. Andrerseits zeigt der Vergleich der beiden Formeln die Überlegenheit der österreichischen Definition: Nur mit Hilfe der theoretischen Verzinsung ist es möglich, die Formel so allgemein zu formulieren, daß auch Rückzahlungen unterschiedlicher Höhe zu beliebigen Zeitpunkten problemlos berücksichtigt werden können.

5. Aufgabenstellungen zu Kreditberechnungen

1) Auf einem Kreditkonto mit einem Jahreszinssatz von 10,5% sind am 31.Dezember 1993 noch 100 000 S offen. Wie groß ist der Schuldenstand am 31. Dezember 1994, wenn bis dahin
a) keine Zahlung geleistet wird,
b) am 5. jedes Monats 2000 S Einzahlung valutiert wird.

2) Auf einem Kreditkonto seien am 30.Juni 1994 noch 100 000 S offen. Wie groß ist der Schuldenstand am 30. Juni 1995, wenn bis dahin keine Zahlung geleistet wird? Erstelle eine Tabelle und berücksichtige die Jahreszinssätze 8,5%, 8,75% , 9%, ... , 12,5%.

Bei der Aufnahme eines Kredites sind in der Regel eine Kreditsteuer (derzeit 0,8% der Kreditsumme) sowie allfällige Bearbeitungsgebühren der Bank (ca. 1% bis 3% der Kreditsumme) zu bezahlen. Diese Nebenkosten werden entweder gleich von der Kreditsumme abgezogen, so daß der Auszahlungsbetrag kleiner ist als die Kreditsumme, oder die Kreditsumme wird entsprechend erhöht (wodurch sich natürlich auch die monatliche Rate erhöht). Bei den folgenden näherungsweisen Bestimmungen der monatlichen Rate bzw. der Kreditgesamtbelastung in den Aufgaben 3) bis 6) sollen diese Nebenkosten unberücksichtigt bleiben.

Angenommen, ein Kreditbetrag wird zu Beginn eines Quartals ausbezahlt und soll durch gleich hohe monatliche Raten getilgt werden. Die erste Rate ist einen Monat nach Auszahlung des Kredits fällig.

3) Erstelle eine Supercalc-Tabelle, in der nach Eingabe von Kreditsumme, Jahreszinssatz und Laufzeit (in Monaten) die Höhe der monatlichen Rate und die Kreditgesamtbelastung näherungsweise berechnet wird.

4) Erstelle eine Supercalc-Tabelle, in der Du für einen vorgegebenen gleichbleibenden Jahreszinssatz i% die Abhängigkeit
a) der monatlichen Rate,
b) der Kreditgesamtbelastung
von der Laufzeit aufzeigst.
Berücksichtige die Laufzeiten 1,2,3,...,10 Jahre bzw. 5,10,15,20,25 Jahre!
Stelle die Daten in geeigneter Form graphisch dar!

5) Erstelle eine Supercalc-Tabelle, in der Du für eine vorgegebene gleichbleibende Kreditlaufzeit die Abhängigkeit
a) der monatlichen Rate,
b) der Kreditgesamtbelastung
vom Jahreszinssatz aufzeigst.
Berücksichtige die Jahreszinssätze 8,5%, 9%, 9,5%, ..., 13% !
Stelle die Daten auch in geeigneter Form graphisch dar!

6) Erstelle eine Supercalc-Tabelle, in der die monatliche Rate für verschiedene Jahreszinssätze und verschiedene Laufzeiten gleichzeitig dargestellt wird:
Dabei sollen Spalten für die Jahreszinssätze 8,5%, 9%, ...,12% und Zeilen für die Laufzeiten 1, 2, 3, ...,10 Jahre berücksichtigt werden.

7) Ändere die Supercalc-Tabellen der Aufgaben 3) bis 6) so ab, daß außer dem Auszahlungsbetrag, dem Jahreszinssatz und der Laufzeit (in Monaten) auch die Höhe einer allfälligen Bearbeitungsgebühr (in Prozent) sowie die Kreditsteuer eingegeben werden kann und bei der Berechnung der monatlichen Rate berücksichtigt wird.

8) Erstelle einen (näherungsweisen) Tilgungsplan für einen Kredit mit einer Laufzeit von 60 Monaten, bei dem die erste Rate einen Monat nach Auszahlung des Kreditbetrags fällig ist:
Dabei soll zunächst nach Eingabe von Auszahlungsbetrag, Bearbeitungsgebühr, Kreditsteuer, Jahreszinssatz und Laufzeit (in Monaten) die Höhe der monatlichen Rate (auf einen ganzen Schillingbetrag gerundet) berechnet werden.
Dann soll eine Tabelle mit folgenden Spalteninhalten erstellt werden:
MONATE ZINSEN TILGUNG RATEN DARL.REST
Für eine näherungsweise Berechnung genügt es, die Monate als gleich lang anzuneh-

men (dh. Monatszinssatz = q/3). Nach jeweils drei Monaten sollen die gesamten Zinsen für diesen Zeitraum zur Restschuld addiert werden.

9) Jemand nimmt am 1.Juli einen Kredit in der Höhe von 200 000 S zu 9,75% p.a. mit einer Laufzeit von 10 Jahren (bei 1% Bearbeitungsgebühr und 0,8% Kreditsteuer). Die Bank bietet für die Rückzahlung die folgenden Wahlmöglichkeiten:

a) Sofortiger Rückzahlungsbeginn, d.h. erste Rate fällig am 1. August.
b) Ein Jahr tilgungsfrei, d.h. im ersten Jahr werden nur die anfallenden Zinsen gezahlt. Danach 120 gleich hohe monatliche Raten (beginnend mit 1.August des nächsten Jahres).
c) Ein Jahr rückzahlungsfrei, danach 120 gleich hohe Raten (beginnend mit 1. August des nächsten Jahres).
Wieviel ist jeweils monatlich zu bezahlen, wie hoch ist in den einzelnen Fällen die Gesamtbelastung?
Erstelle für die einzelnen Rückzahlungsvarianten auch näherungsweise Tilgungspläne (wie in Aufgabe 8)!

10) Bei einem Kredit mit einer Laufzeit von mehreren Jahren muß der Kreditnehmer damit rechnen, daß der Jahreszinssatz immer wieder dem jeweils aktuellen Zinsniveau angepaßt wird. Bei einer Änderung des Zinssatzes wird üblicherweise die Höhe der monatlichen Rate so abgeändert, daß der Kredit bei Zahlung dieses neuen Betrags innerhalb der ursprünglich vereinbarten Laufzeit getilgt werden kann. Entscheidet sich der Kreditnehmer bei einer Zinssatzerhöhung dafür, die monatliche Rate nicht zu erhöhen, so muß er eine Verlängerung der Laufzeit in Kauf nehmen.
Untersuche anhand des folgenden Beispiels, wie sich eine Erhöhung des Zinssatzes während der Kreditlaufzeit auf die Höhe der monatlichen Rate bzw. auf die Restlaufzeit auswirken kann!

Jemand nimmt am 1.April 1994 einen Kredit zu 9,25% p.a. Die Kreditsumme umfaßt neben dem ausgezahlten Betrag von 200 000 S auch die anfallende 1%ige Bearbeitungsgebühr der Bank sowie die 0,8%ige Kreditsteuer und soll durch 120 gleich hohe monatliche Raten, beginnend mit 1.Mai 1994 getilt werden.
a) Bestimme die Höhe der monatlich fälligen Kreditrate!
b) Um wie viele Monate verlängert sich die Laufzeit des Kredits, wenn bei gleichbleibender monatlicher Kreditrate
b1) am 1.April 1996,
b2) am 1.April 1999
der Jahreszinssatz auf 11% erhöht wird?
c) Ändere in beiden Fällen die Höhe der monatlichen Rate ab dem Wirksamwerden der Zinssatzänderung (d.h. ab 1.Mai 1996 bzw. ab 1.Mai 1999) so ab, daß der Kredit innerhalb der ursprünglich vereinbarten Laufzeit getilgt wird.

11) Kommt ein Kreditnehmer seinen im Kreditvertrag festgelegten Zahlungsverpflichtungen nicht termingerecht nach, so muß er damit rechnen, daß für den ausstehenden Geldbetrag zusätzliche Verzugszinsen anfallen. Umgekehrt ist es aber bei den meisten Krediten möglich, Zahlungsverpflichtungen ganz oder teilweise vorzeitig zu erfüllen, ohne daß dadurch zusätzliche Spesen erwachsen.
Untersuche anhand des folgenden Beispiels, wie sich die vorzeitige Rückzahlung eines Teils der Restschuld auswirken kann!

Jemand nimmt am 1.April 1994 einen Kredit zu 9,25% p.a. Die Kreditsumme umfaßt neben dem ausgezahlten Betrag von 300 000 S auch die anfallende 1%ige Bearbeitungsgebühr der Bank sowie die 0,8%ige Kreditsteuer und soll durch 120 gleich hohe monatliche Raten, beginnend mit 1.Mai 1994 getilt werden.
a) Bestimme die Höhe der monatlich fälligen Kreditrate!
b) Um wie viele Monate verkürzt sich die Laufzeit des Kredits, wenn bei gleichbleibender monatlicher Kreditrate
b1) am 1.April 1996,
b2) am 1.April 1999
ein Betrag in der Höhe von 100 000 S rückgezahlt wird?

12) Die Formel

$$R = K^* \frac{q^*(1+q)^n}{(3+q)^*[(1+q)^n - 1]}$$

[= monatliche Rate bei einer Laufzeit von n Quartalen, wobei $q = i/100/4^*(365/360)$]

gibt die Abhängigkeit der monatlichen Rate R von der Kreditsumme K, dem Quartalszinssatz q und der Laufzeit n (in Quartalen) an.
a) Für konstantes q und n kann R = R(K) als Funktion der Kreditsumme K aufgefaßt werden. Beschreibe den Zusammenhang zwischen R und K!
b) Für konstanten K und q kann R = R(n) als Funktion der Laufzeit n aufgefaßt werden. Untersuche den Zusammenhang zwischen R und n:
b1) Zeige, daß R(n) streng monoton fällt!
b2) Bestimme R(1) und R_∞ = lim R(n) für n--> ∞ .
b3) Gib eine inhaltliche Interpretation der Größe R_∞!

13) Angenommen ein Kredit, der vierteljährlich kapitalisiert wird, soll durch n gleich hohe vierteljährliche Raten getilgt werden. Erstelle eine Formel zur näherungsweisen Berechnung der vierteljährlichen Rate unter der Annahme, daß der Kreditbetrag
a) zu Quartalsanfang
b) einen Monat vor Quartalsende
c) in der Mitte eines Quartals
ausbezahlt wird und die erste Rate am erstfolgenden Quartalsende fällig ist.

14) Es gibt Kreditsonderformen, bei denen nicht vierteljährlich, sondern nur halbjährlich kapitalisiert wird. Ein Beispiel dafür sind die Wohnungsverbesserungsdarlehen im Sinne des Wiener Wohnbauförderungs- und Wohnhaussanierungsgesetzes (WWFSG 1989). Diese Darlehen sind wahlweise durch 10 oder durch 20 gleich hohe halbjährliche Raten zu tilgen, die jeweils am 20.5. und am 20.11. fällig sind. Die dekursiv berechneten Zinsen werden ebenfalls am 20.5. und am 20.11. dem Schuldkapital zugeschlagen.
Erstelle eine Formel zur näherungsweisen Berechnung der halbjährlichen Rate und der Kreditgesamtbelastung für die möglichen Laufzeiten 5 Jahre bzw. 10 Jahre unter der Annahme, daß die Kreditsumme
a) an einem 20.5. bzw. 20.11. ausbezahlt wird,
b) in der Mitte der Kapitalisierungsperiode ausbezahlt wird,
c) einen Monat vor dem Kapitalisierungstermin ausbezahlt wird,
wobei jeweils die erste halbjährliche Rate am nächstfolgenden 20.5. bzw. 20.11. eingezahlt wird.

15) Ein Prospekt einer Bank enthält die folgenden Kreditangebote (Stand: März 1994). Überprüfe die Angaben über den effektiven Jahreszinssatz!
(Berechne jeweils zunächst die Höhe R der monatlichen Rate (unter Berücksichtigung der 1%igen Bearbeitungsgebühr, jedoch ohne Berücksichtigung der Kreditsteuer) für einen Auszahlungsbetrag von zum Beispiel Z = 100 000 S und die genannten Laufzeiten von 5 bzw. 10 Jahren. Setze dann Z und R in die Formel für den effektiven Jahreszinssatz ein und löse die Gleichung näherungsweise).

WOHNUNGSKREDIT
Der Effektivzinssatz*) ist laufzeitabhängig.
Er beträgt z.B. bei 10 Jahren 7,26% pro Jahr, bei 20 Jahren 7,15% pro Jahr. Im Falle des Zahlungsverzugs beträgt der fiktive Zinssatz für den rückständigen Betrag 11,90% pro Jahr.

6 3/4 %
pro Jahr
zuzüglich
1% Bearbeitungsgebühr
bis 25 Jahre Laufzeit

PRIVATKREDIT mit Gehaltskonto
Der Effektivzinssatz*) ist laufzeitabhängig.
Er beträgt z.B. bei 5 Jahren 9,77% pro Jahr, bei 10 Jahren 9,56% pro Jahr. Im Falle des Zahlungsverzugs beträgt der fiktive Zinssatz für den rückständigen Betrag 14,26% pro Jahr.

8 7/8 %
pro Jahr
zuzüglich
1% Bearbeitungsgebühr
bis 15 Jahre Laufzeit

PRIVATKREDIT
Der Effektivzinssatz*) ist laufzeitabhängig.
Er beträgt z.B. bei 5 Jahren 10,86% pro Jahr, bei 10 Jahren 10,65% pro Jahr.
Im Falle des Zahlungsverzugs beträgt der fiktive Zinssatz für den rückständigen Betrag 15,38% pro Jahr.

9 7/8 %
pro Jahr
zuzüglich
1% Bearbeitungsgebühr
bis 10 Jahre Laufzeit

*) Detailinformation über den Effektivzinssatz für alle Laufzeiten erhalten Sie am Schalter.